Teoria do Risco
Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

- Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES,M.D. Modelo de risco coletivo: Distribuição do número de sinistros. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2025. Disponível em: https://atuaria.github.io/portalhalley/notas_TR.html. Acessado em: 28 jun. 2025.

Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = I_1B_1 + I_2B_2 + \cdots + I_nB_n$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \cdots = B_n = 1$$

$$N = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$N =$ Número de sinistros na carteira em 1 ano. Se I_{is} iid.

$$S_{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial para N

- N é o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios (tentativas) de Bernoulli independentes.

$$N \sim B(n, q)$$

$$P(N = k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(k)$$

$$\boldsymbol{E(N) = nq}\,; \qquad \boldsymbol{var(N) = nq(1-q)}\,; \qquad \boldsymbol{M_N(t) = (1 - q + qe^t)^n}$$

$$E(N) > var(N)$$

Quando N tem distribuição de Binomial, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = nqE(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 nq(1-q) + (nq)var(X) = nq[E(X^2) - E(X)^2 q]$$

$$M_{S_{col}}(t) = [1 - q + qM_X(t)]^n$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) \binom{n}{k} q^k (1-k)^{n-k}$$

Exemplo 1: Suponha uma carteira de seguros (anual) composta por 3 apólices de seguros independentes e identicamente distribuídas, tal que:

X_i	$R\$0,00$	$R\$1000,00$	$R\$2000,00$	$R\$3000,00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Calcule a probabilidade que ocorram 2 sinistros nessa carteira, usando o modelo de probabilidade binomial.

Exemplo 1:

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$
R$0,00	0,6	0	0,6
R$1000,00	0,02	1	0,4
R$2000,00	0,06		
R3000,00	0,32		

$$P(N = 2) = \binom{3}{2} 0{,}4^2 0{,}6^{3-2} \approx 0{,}288$$

- Distribuição de Pascal

- As distribuições do tempo de espera é relacionada a uma classe de problemas associados com a quantidade de tempo que leva para a ocorrência de um evento específico de interesse.

- A variável aleatória N é definida como sendo igual ao número de fracassos (k) requeridos para que ocorra o r sucessos,

  - Nota-se que ocorrem k fracassos e $r-1$ sucessos antes do $r-$ é$simo$ sucesso.

  - Representa o número de falhas que podem ocorrer numa sequência de ensaios de Bernoulli antes um número de sucessos alvo for atingido.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

$N \sim BN(r, q)$ é dita variável aleatória discreta de tempo de espera.

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} q^r (1 - q\ )^k$$

$k = 0,1,2,3 \ldots$ representa o número de falhas até a ocorrência do $r - \acute{e}simo$ sucesso, $r > 0$ e $0 < q < 1$,

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \qquad var(N) = \frac{r(1-q)}{q^2} \qquad M_N(t) = \left[\frac{q}{1-(1-q)e^t}\right]^r$$

$$\boldsymbol{var(N) > E(N)}$$

Quando N tem distribuição binomial negativa, dizemos que S_{col} tem distribuição binomial negativa composta, sendo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{r(1-q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X) = E(X)^2 \left[\frac{r(1-q)^2}{q^2}\right] + E(X^2)\left[\frac{r(1-q)}{q}\right].$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[\frac{q}{1-(1-q)M_X(t)}\right]^r$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s) \binom{k+r-1}{k} q^r (1-q)^k$$

EXEMPLO 2: Considere uma carteira de seguros na qual o número de sinistros é modelado pela distribuição Binomial Negativa, com probabilidade de ocorrência igual a 0,02 e número esperado de sinistros igual a 500. Considere também que os sinistros individuais tenham distribuição exponencial com parâmetro $\alpha = 0{,}01$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \frac{r(1-q)^2}{q^2} + E(X^2) \frac{r(1-q)}{q}$$

$$E(N) = \frac{r(1-0{,}02)}{0{,}02} = 500$$

$$E(S_{col}) = 500\frac{1}{0{,}01} = 50000$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2\frac{r(1-q)^2}{q^2} + E(X^2)\frac{r(1-q)}{q} = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{r(1-q)}{q}\left(\frac{1-q}{q}\right) + \left(\frac{2}{\alpha^2}\right)\frac{r(1-q)}{q}$$

$$var(S_{col}) = 10000 \times 24500 + \left(\frac{2}{0{,}01^2}\right)500 = 255000000$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

- ...expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo (espaço, região...) se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.

- ...surge como um modelo adequado para descrição de frequência de eventos de baixa probabilidade de ocorrência, porém sujeitos a um grande número de experimentos.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} I_{\{0,1,\dots\}}(k)$$

N expressa a ocorrência de um dado número de eventos.

λ (intensidade da distribuição Poisson), é um parâmetro que indica a taxa de ocorrência desses eventos.

$$E(N) = \lambda \qquad var(N) = \lambda \qquad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$E(N) = var(N)$$

Quando N tem distribuição de Poisson, dizemos que S_{col} tem distribuição de Poisson composta, em que $\lambda > 0$, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X) = \lambda E(X^2)$$

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^{n} p^{*k}(s)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

EXEMPLO 3: Considere que os sinistros de uma carteira tenham distribuição Poisson Composta com $\lambda = 150$ (número médio de sinistros por ano) e que o montante dos sinistros individuais tenham distribuição de Pareto com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2000$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$E(S_{col}) = \lambda E(X)$

$var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$

$f(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, x > 0 \ (\alpha, \beta > 0)$

$\mathrm{E}(X) = \frac{\beta}{(\alpha-1)}$

$$var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \qquad \alpha > 2$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \quad \text{e} \quad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha-1)}, \qquad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \qquad \alpha > 2$$

Assim

$$E(S_{col}) = \lambda \frac{\beta}{(\alpha-1)} = 150\frac{2000}{2} = 150000$$

$$var(S_{col}) = \lambda\left\{\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} + \left[\frac{\beta}{(\alpha-1)}\right]^2\right\} = 150\left[\frac{3\times 2000^2}{4} + \left(\frac{2000}{2}\right)^2\right]$$

$$var(S_{col}) = 150\left(\frac{3\times 2000^2}{4} + \frac{2000^2}{4}\right) = 600\,000\,000$$

Exemplo 4: Suponha novamente a carteira de seguros (anual) do exemplo 1, composta por 3 apólices de seguros independentes e identicamente distribuídas, tal que:

X_i	$R\$0,00$	$R\$1000,00$	$R\$2000,00$	$R\$3000,00$
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Considerando essa carteira tem todas as apólices renovadas ano a ano, qual a probabilidade de que em 10 anos ocorram 5 sinistros?

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6
R\$1000,00	0,02	1	0,4
R\$2000,00	0,06		
R\$3000,00	0,32		

Utilizando o modelo binomial teríamos $n = 3$ e $q = 0{,}4$, logo

$$E(N) = n \times q = 3 \times 0{,}4 = 1{,}2$$

Em 10 anos temos:

$$\lambda = 1{,}2 \times 10 = 12$$

Assim:

$$P(N = 5) = \frac{12^5 e^{-12}}{5!} \approx 0{,}0127$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

Para fenômenos com a mesma esperança matemática de frequência, o ajuste de um modelo binomial apresentaria menor variância que a do modelo de Poisson que apresentaria menor variância do que o ajuste com o modelo binomial negativo.

$$\sigma_B^2 < \sigma_P^2 < \sigma_{NB}^2$$

As distribuições Binomial, Poisson e Binomial negativa podem ser satisfatoriamente aproximadas pela distribuição normal...

$$N \sim N\big(nq, nq(1-q)\big)$$

$$N \sim N(\lambda, \lambda)$$

$$N \sim N\left(\frac{r(1-q)}{q}, \frac{r(1-q)}{q^2}\right)$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar **10** carros, calcule o que se pede.

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios?

b) Qual a probabilidade de que a segunda falha ocorra no décimo carro testado?

c) Qual a probabilidade que sejam detectados 4 carros com falhas nos freios em dois lotes de 10 automóveis?

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar **10** carros, calcule o que se pede.

Solução

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios?

$$P(N = 2) = \binom{10}{2} 0{,}1^2(0{,}9)^8 \approx 0{,}1937102$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar **10** carros, calcule o que se pede.

Solução

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios? $\approx \mathbf{19,37\%}$

b) Qual a probabilidade de que a segunda falha de freios ocorra no décimo carro testado?

Assim $r = 2$ sucessos (sucesso pois o escopo do estudo é o número de falhas encontradas.) e $k = 8$ fracassos. Logo :

$$P(N = 8) = \binom{8+2-1}{8} 0{,}1^2 (0{,}9\ )^8 \approx 0{,}03874$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar **10** carros, calcule o que se pede.

Solução

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios? $\approx \mathbf{19,37\%}$

b) Qual a probabilidade de que a segunda falha ocorra no décimo carro testado? $\approx \mathbf{3,87\%}$

c) Qual a probabilidade que sejam detectados 4 carros com falhas nos freios em 2 lotes de 10 automóveis?

Utilizando o modelo binomial teríamos $n = 10$ e $q = 0{,}1$, logo

$$E(N) = n \times q = 10 \times 0{,}1 = 1$$

Em **10** anos temos:

$$\lambda = 1 \times 2 = 2$$

Assim:

$$\mathrm{P(N = 4)} = \frac{2^4 \mathrm{e}^{-2}}{4!} \approx 0{,}090223$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar **10** carros, calcule o que se pede.

Solução

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios?

$$\approx \mathbf{19,37\%}$$

a) Qual a probabilidade de que a segunda falha ocorra no décimo carro testado?

$$\approx \mathbf{3,87\%}$$

a) Qual a probabilidade que sejam detectados 4 carros com falhas nos freios em 2 lotes de 10 automóveis?

$$\approx \mathbf{9,02\%}$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial.** São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.