

Teoria do Risco

Aula 12

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://atuaria.github.io/portalthalley>

Modelo de Risco Individual

$$S_{ind.} = I_1 B_1 + I_2 B_2 + \cdots + I_n B_n$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \cdots = B_n = 1$$

$$N = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

N = Número de sinistros na carteira em 1 ano. Se I_i iid.

$$S_{col} = \sum_{i=1}^N X_i$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial para N

- N é o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios (tentativas) de Bernoulli independentes.

$$N \sim B(n, q)$$

$$P(N = k) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k} I_{\{0,1,\dots,n\}}(k)$$

$$E(N) = nq; \quad \text{var}(N) = nq(1 - q); \quad M_N(t) = (1 - q + qe^t)^n$$

$$E(N) > \text{var}(N)$$

Quando N tem distribuição de Binomial, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = nqE(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2nq(1 - q) + (nq)var(X) = nq[E(X^2) - E(X)^2q]$$

$$M_{S_{col}}(t) = [1 - q + qM_X(t)]^n$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}$$

Exemplo 1: Suponha uma carteira de seguros (anual) composta por 3 apólices de seguros independentes e identicamente distribuídas, tal que:

X_i	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Calcule a probabilidade que ocorram 2 sinistros nessa carteira.

Exemplo 1:

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6
R\$1000,00	0,02	1	0,4
R\$2000,00	0,06		
R\$3000,00	0,32		

$$P(N = 2) = \binom{3}{2} 0,4^2 0,6^{3-2} = 0,288$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

- Distribuição de Pascal
- As distribuições do tempo de espera é relacionada a uma classe de problemas associados com a quantidade de tempo que leva para a ocorrência de um evento específico de interesse.
- A variável aleatória N é definida como sendo igual ao número de fracassos (k) requeridos para que ocorra o r sucessos,
 - Nota-se que ocorrem k fracassos e $r - 1$ sucessos antes do $r - \text{ésimo}$ sucesso no último ensaio.
 - Representa o número de falhas que podem ocorrer numa sequência de ensaios de Bernoulli antes um número de sucessos alvo for atingido.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Binomial Negativa para N

$N \sim BN(r, q)$ é dita variável aleatória discreta de tempo de espera.

$$P(N = k) = \binom{k + r - 1}{k} q^r (1 - q)^k$$

$k = 0, 1, 2, 3 \dots$ representa o número de falhas até a ocorrência do r –ésimo sucesso, $r > 0$ e $0 < q < 1$,

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \quad \text{var}(N) = \frac{r(1-q)}{q^2} \quad M_N(t) = \left[\frac{q}{1-(1-q)e^t} \right]^r$$

$$\text{var}(N) > E(N)$$

Quando N tem distribuição binomial negativa, dizemos que S_{col} tem distribuição binomial negativa composta, sendo:

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \frac{r(1-q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N)var(X) = E(X)^2 \left[\frac{r(1-q)^2}{q^2} \right] + E(X^2) \left[\frac{r(1-q)}{q} \right].$$

$$M_{S_{col}}(t) = \left[\frac{q}{1 - (1-q)M_X(t)} \right]^r$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \binom{k+r-1}{k} q^r (1-q)^k$$

EXEMPLO 2: Considere uma carteira de seguros em que o número de sinistros obedeça a uma distribuição Binomial Negativa, cuja probabilidade de ocorrência seja de 0,02 e tenha o número esperado de sinistros igual a 500. Considere também que os sinistros individuais tenham distribuição exponencial com $\alpha = 0,01$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \frac{r(1-q)}{q} E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \frac{r(1-q)^2}{q^2} + E(X^2) \frac{r(1-q)}{q}$$

$$E(N) = \frac{r(1 - 0,02)}{0,02} = 500$$

$$E(S_{col}) = 500 \frac{1}{0,01} = 50000$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 \frac{r(1 - q)^2}{q^2} + E(X^2) \frac{r(1 - q)}{q} = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{r(1 - q)}{q} \left(\frac{1 - q}{q}\right) + \left(\frac{2}{\alpha^2}\right) \frac{r(1 - q)}{q}$$

$$var(S_{col}) = 10000 \times 24500 + \left(\frac{2}{0,01^2}\right) 500 = 255000000$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

- ...expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo (espaço, região...) se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento.
- ...surge como um modelo adequado para descrição de frequência de eventos de baixa probabilidade de ocorrência, porém sujeitos a um grande número de experimentos.

Modelos de risco Coletivo- Distribuição Poisson para N

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} I_{\{0,1,\dots\}}(k)$$

N expressa a ocorrência de um dado número de eventos.

λ (intensidade da distribuição Poisson), é um parâmetro que indica a taxa de ocorrência desses eventos.

$$E(N) = \lambda \quad \text{var}(N) = \lambda \quad M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$E(N) = \text{var}(N)$$

Quando N tem distribuição de Poisson, dizemos que S_{col} tem distribuição de Poisson composta, em que $\lambda > 0$, no intervalo fixo de 1 ano.

$$E(S_{col}) = E(N)E(X) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = E(X)^2 var(N) + E(N) var(X) = \lambda E(X^2)$$

$$M_{S_{col}}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$$

$$P_{S_{col}}(s) = \sum_{k=0}^n p^{*k}(s) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

EXEMPLO 3: Considere que os sinistros de uma carteira tenham distribuição Poisson Composta com $\lambda = 150$ (número médio de sinistros por ano) e que o montante dos sinistros individuais tenham distribuição de Pareto com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2000$. Calcule a esperança e a variância desta carteira.

$$E(S_{col}) = \lambda E(X)$$

$$var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$f(X) = \frac{\alpha \beta^\alpha}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, x > 0 (\alpha, \beta > 0)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}$$

$$var(X) = \frac{\alpha \beta^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)},$$

$$\alpha > 2$$

$$E(S_{col}) = \lambda E(X) \quad \text{e} \quad var(S_{col}) = \lambda E(X^2)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{(\alpha - 1)}, \quad var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$$

Assim

$$E(S_{col}) = \lambda \frac{\beta}{(\alpha - 1)} = 150 \frac{2000}{2} = 150000$$

$$var(S_{col}) = \lambda \left\{ \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)} + \left[\frac{\beta}{(\alpha - 1)} \right]^2 \right\} = 150 \left[\frac{3 \times 2000^2}{4} + \left(\frac{2000}{2} \right)^2 \right]$$

$$var(S_{col}) = 150 \left(\frac{3 \times 2000^2}{4} + \frac{2000^2}{4} \right) = 600\,000\,000$$

Exemplo 4: Suponha novamente a carteira de seguros (anual) do exemplo 1, composta por 3 apólices de seguros independentes e identicamente distribuídas, tal que:

X_i	R\$0,00	R\$1000,00	R\$2000,00	R\$3000,00
$P(X_i)$	0,6	0,02	0,06	0,32

Considerando essa carteira tem todas as apólices renovadas ano a ano, qual a probabilidade de que em 10 anos ocorram 5 sinistros?

X_i	$P(X_i = x_i)$	I_i	$P(I_i = i_i)$
R\$0,00	0,6	0	0,6
R\$1000,00	0,02	1	0,4
R\$2000,00	0,06		
R\$3000,00	0,32		

Utilizando o modelo binomial teríamos $n = 3$ e $q = 0,4$, logo

$$E(N) = n \times q = 3 \times 0,4 = 1,2$$

Em 10 anos temos:

$$\lambda = 1,2 \times 10 = 12$$

Assim:

$$P(N = 5) = \frac{12^5 e^{-12}}{5!} \approx 0,0127$$

Modelos de risco Coletivo- Distribuição para N

Para fenômenos com a mesma esperança matemática de frequência, o ajuste de um modelo binomial apresentaria menor variância que a do modelo de Poisson que apresentaria menor variância do que o ajuste com o modelo binomial negativo.

$$\sigma_B^2 < \sigma_P^2 < \sigma_{NB}^2$$

As distribuições Binomial, Poisson e Binomial negativa podem ser satisfatoriamente aproximadas pela distribuição normal...

$$N \sim N(nq, nq(1 - q))$$

$$N \sim N(\lambda, \lambda)$$

$$N \sim N\left(\frac{r(1 - q)}{q}, \frac{r(1 - q)}{q^2}\right)$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar 10 carros, calcule o que se pede.

- a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios?
- b) Qual a probabilidade de que a segunda falha ocorra no décimo carro testado?
- c) Qual a probabilidade que sejam detectados 4 carros com falhas nos freios em dois lotes de 10 automóveis?

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar 10 carros, calcule o que se pede.

Solução

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios?

$$P(N = 2) = \binom{10}{2} 0,1^2 (0,9)^8 \approx 0,1937102$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar 10 carros, calcule o que se pede.

Solução

- Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios? \approx **19,37%**
- Qual a probabilidade de que a segunda falha de freios ocorra no décimo carro testado?

Assim $r = 2$ sucessos (sucesso pois o escopo do estudo é o número de falhas encontradas.) e $k = 8$ fracassos. Logo :

$$P(N = 8) = \binom{8 + 2 - 1}{8} 0,1^2 (0,9)^8 \approx 0,03874$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar 10 carros, calcule o que se pede.

Solução

- Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios? $\approx 19,37\%$
- Qual a probabilidade de que a segunda falha ocorra no décimo carro testado? $\approx 3,87\%$
- Qual a probabilidade que sejam detectados 4 carros com falhas nos freios em 2 lotes de 10 automóveis?

Utilizando o modelo binomial teríamos $n = 10$ e $q = 0,1$, logo

$$E(N) = n \times q = 10 \times 0,1 = 1$$

Em 10 anos temos:

$$\lambda = 1 \times 2 = 2$$

Assim:

$$P(N = 4) = \frac{2^4 e^{-2}}{4!} \approx 0,090223$$

EXEMPLO 5: Assuma que a probabilidade de que o sistema de freios instalado em uma determinada marca de carro, passe no teste de segurança seja de 0,9 e que cada carro tenha seu desempenho independente. Sendo assim ao testar 10 carros, calcule o que se pede.

Solução

a) Qual a probabilidade de que sejam detectados dois carros com falha nos freios?

$$\approx \mathbf{19,37\%}$$

a) Qual a probabilidade de que a segunda falha ocorra no décimo carro testado?

$$\approx \mathbf{3,87\%}$$

a) Qual a probabilidade que sejam detectados 4 carros com falhas nos freios em 2 lotes de 10 automóveis?

$$\approx \mathbf{9,02\%}$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Deiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

